

5. cvičení - řešení

Příklad 1 (a)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y)) &\stackrel{V20}{=} f'_u(u(x, y), v(x, y)) \cdot u'_x(x, y) + f'_v(u(x, y), v(x, y)) \cdot v'_x(x, y) = \\
 &= \sqrt{1 + v(x, y)^2} \cdot 2e^{2x} + \frac{u(x, y)}{2\sqrt{1 + v(x, y)^2}} \cdot e^x = \sqrt{1 + (e^x)^2} \cdot 2e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2\sqrt{1 + (e^x)^2}} \cdot e^x = \\
 &= 2e^{2x} \sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{e^{3x}}{2\sqrt{1 + e^{2x}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} f(u(x, y), v(x, y)) &\stackrel{V20}{=} f'_u(u(x, y), v(x, y)) \cdot u'_y(x, y) + f'_v(u(x, y), v(x, y)) \cdot v'_y(x, y) = \\
 &= \sqrt{1 + v(x, y)^2} \cdot 0 + \frac{u(x, y)}{2\sqrt{1 + v(x, y)^2}} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Příklad 1 (b)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y)) &\stackrel{V20}{=} f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x + f'_w \cdot w'_x = \\
 &= v(x, y)^2 w(x, y)^3 \cdot (-\cos x) + 2u(x, y) v(x, y) w(x, y)^3 \cdot (-\sin x) + 3u(x, y) v(x, y)^2 w(x, y)^2 \cdot e^x = \\
 &= -\cos^3 x \cdot e^{3x} + 2 \sin^2 x \cos x e^{3x} - 3 \sin x \cos^2 x e^{3x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} f(u(x, y), v(x, y)) &\stackrel{V20}{=} f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y + f'_w \cdot w'_y = \\
 &= v(x, y)^2 w(x, y)^3 \cdot 0 + 2u(x, y) v(x, y) w(x, y)^3 \cdot 0 + 3u(x, y) v(x, y)^2 w(x, y)^2 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Příklad 1 (c)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y)) &\stackrel{V20}{=} f'_u(u(x, y), v(x, y)) \cdot u'_x(x, y) + f'_v(u(x, y), v(x, y)) \cdot v'_x = \\
 &= \cos(u(x, y)) \cos(v(x, y)) \cdot 2(x - y) - \sin(u(x, y)) \sin(v(x, y)) \cdot 2x = \\
 &= 2(x - y) \cos((x - y)^2) \cos(x^2 - y^2) - 2x \sin((x - y)^2) \sin(x^2 - y^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} f(u(x, y), v(x, y)) &\stackrel{V20}{=} f'_u(u(x, y), v(x, y)) \cdot u'_y(x, y) + f'_v(u(x, y), v(x, y)) \cdot v'_y = \\
 &= \cos(u(x, y)) \cos(v(x, y)) \cdot 2(x - y) \cdot (-1) - \sin(u(x, y)) \sin(v(x, y)) \cdot (-2y) = \\
 &= 2(y - x) \cos((x - y)^2) \cos(x^2 - y^2) + 2y \sin((x - y)^2) \sin(x^2 - y^2)
 \end{aligned}$$

Příklad 1 (d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) &= f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x + f'_w \cdot w'_x = \\
&= -3u(x, y)^2 \cdot e^x + w(x, y)^2 \cdot \frac{1}{x + 2y + 3z} + 2v(x, y)w(x, y) \cdot \frac{y}{2\sqrt{xy + z}} = \\
&= -3e^{3x-2y} + \frac{xy + z}{x + 2y + 3z} + 2\log(x + 2y + 3z) \frac{y}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) &= f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y + f'_w \cdot w'_y = \\
&= -3u(x, y)^2 \cdot (-e^{x-y}) + w(x, y)^2 \cdot \frac{2}{x + 2y + 3z} + 2v(x, y)w(x, y) \cdot \frac{x}{2\sqrt{xy + z}} = \\
&= 3e^{3(x-y)} + \frac{2(xy + z)}{x + 2y + 3z} + x\log(x + 2y + 3z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) &= f'_u \cdot u'_z + f'_v \cdot v'_z + f'_w \cdot w'_z = \\
&= -3u(x, y)^2 \cdot 0 + w(x, y)^2 \cdot \frac{3}{x + 2y + 3z} + 2v(x, y)w(x, y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{xy + z}} = \\
&= \frac{3\sqrt{xy + z}}{x + 2y + 3z} + \log(x + 2y + 3z)
\end{aligned}$$

Příklad 2

Pomocí řetízkového pravidla spočteme parciální derivace funkce F .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &\stackrel{\text{20}}{=} \frac{y}{z} \log x + \frac{y}{z} + f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x \cdot \left(f'_x\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2} + f'_y\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \cdot \frac{-z}{x^2}\right) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &\stackrel{\text{20}}{=} \frac{x}{z} \log x + x \cdot f'_x\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} \\
\frac{\partial F}{\partial z} &\stackrel{\text{20}}{=} \frac{-xy}{z^2} \log x + x \cdot f'_y\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Pak platí následující.

$$\begin{aligned}
x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{xy}{z} \log x + \frac{xy}{z} + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - yf'_x\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - zf'_y\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \\
&\quad + \frac{xy}{z} \log x + yf'_x\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) - \frac{xy}{z} \log x + zf'_y\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = \\
&= \frac{xy}{z} \log x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \frac{xy}{z} = F + \frac{xy}{z}
\end{aligned}$$

Příklad 3

$$\frac{\partial g}{\partial x} \stackrel{\text{20}}{=} f'_x(x + y, x - y) + f'_y(x + y, x - y)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (f'_x(x+y, x-y) + f'_y(x+y, x-y)) = \\ &\stackrel{\text{V20}}{=} f''_{x,x}(x+y, x-y) + f''_{x,y}(x+y, x-y) \cdot (-1) + f''_{y,x}(x+y, x-y) + f''_{y,y}(x+y, x-y) \cdot (-1)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x}(a, b) = f''_{x,x}(a+b, a-b) - f''_{x,y}(a+b, a-b) + f''_{y,x}(a+b, a-b) - f''_{y,y}(a+b, a-b)$$

Příklad 4

Spočtěme první a druhé parciální derivace F .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &\stackrel{\text{V20}}{=} f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &\stackrel{\text{V20}}{=} xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &\stackrel{\text{V20}}{=} \frac{\partial}{\partial x} (f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)) = 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &\stackrel{\text{V20}}{=} \frac{\partial}{\partial y} (f(x+y) + xf'(x+y) + yg'(x+y)) = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &\stackrel{\text{V20}}{=} \frac{\partial}{\partial y} (xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x+y)) = xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y)\end{aligned}$$

Pak platí.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) &= \\ &= 2f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y) - 2f'(x+y) - \\ &\quad - 2xf''(x+y) - 2g'(x+y) - 2yg''(x+y) + xf''(x+y) + 2g'(x+y) + yg''(x+y) = 0\end{aligned}$$

Příklad 5 (a) $x = u \cos \frac{v}{u}$, $y = u \sin \frac{v}{u}$, $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, 1, 0]$

Použijeme Větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zaveďme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = x - u \cos \frac{v}{u}, \quad F_2(x, y, u, v) = y - u \sin \frac{v}{u}.$$

Platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$. Spočítejme všechny první parciální derivace funkcí F_1, F_2 . Z jejich předpisů pak plyne, že na okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ jsou spojité jakožto součet a složení spojitých funkcí. Rovnou si spočtěme i derivace v bodě $[x_0, y_0, u_0, v_0]$, neb tušíme, že se nám později budou hodit.

Použijme **značení pro gradient**:

$$\nabla F(x, y, u, v) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, u, v), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, u, v), \frac{\partial F}{\partial u}(x, y, u, v), \frac{\partial F}{\partial v}(x, y, u, v) \right).$$

$$\nabla F_1(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\cos \frac{v}{u} + u \sin \frac{v}{u} \cdot \frac{-v}{u^2} \\ \sin \frac{v}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\cos \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \\ \sin \frac{v}{u} \end{pmatrix} \quad \nabla F_1(1, 0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla F_2(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sin \frac{v}{u} - u \cdot \frac{-v}{u^2} \cos \frac{v}{u} \\ -\cos \frac{v}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} - \sin \frac{v}{u} \\ -\cos \frac{v}{u} \end{pmatrix} \quad \nabla F_2(1, 0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ověřme poslední předpoklad Věty 23 - spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{vmatrix} (1, 0, 1, 0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Podle Věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

Spočtěme derivace pomocí matic, jak je odvozeno v supersemináři a uvedeno v teorii.

víme, že vektor $(\varphi_x(1, 0), \psi_x(1, 0))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{array} \right) (1, 0, 1, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_x(1, 0) = 1$, $\psi'_x(1, 0) = 0$.

Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{array} \right) (1, 0, 1, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_y(1, 0) = 0$, $\psi'_y(1, 0) = 1$.

Jiný způsob, jak spočítat derivace:

Platí, že $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0 = F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y))$ (ze znění věty). Platí tedy následující rovnosti.

$$F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = x - \varphi(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} = 0 \quad (1)$$

$$F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = y - \varphi(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} = 0 \quad (2)$$

K vypočtení φ'_x , ψ'_x zderivujeme rovnosti (1), (2) podle x . Všimněme si, že pravá strana je 0, tedy se nám zderivuje na 0. Dostaneme následující soustavu.

$$\begin{aligned} 1 - \varphi'_x(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} - \varphi(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_x(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_x(x, y)}{\varphi(x, y)^2} &= 0 \\ -\varphi'_x(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} + \varphi(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_x(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_x(x, y)}{\varphi(x, y)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme tak vztahy pro φ'_x, ψ'_x . Jelikož nás zajímají derivace jen v bodě $[x_0, y_0]$, dosadíme do předchozí rovnice tento bod a až pak soustavu vyřešíme, abychom spočetli hodnoty derivací. Dosazením bodu $[x_0, y_0]$ dostáváme následující soustavu.

$$\begin{aligned} 1 - \varphi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ 1 \cdot 1 \cdot \frac{\psi'_x(x_0, y_0) \cdot 1 - 0}{1^2} &= \psi'_x(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}$$

Dostáváme, že $\varphi'_x(x_0, y_0) = 1, \psi'_x(x_0, y_0) = 0$.

Stejným způsobem spočteme derivace podle y . Zderivováním rovnic 1, 2 podle y dostaneme:

$$\begin{aligned} -\varphi'_y(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} - \varphi(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_y(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_y(x, y)}{\varphi(x, y)^2} &= 0 \\ 1 - \varphi'_y(x, y) \cdot \sin \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} + \varphi(x, y) \cdot \cos \frac{\psi(x, y)}{\varphi(x, y)} \cdot \frac{\psi'_y(x, y) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) \cdot \varphi'_y(x, y)}{\varphi(x, y)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Dosazením bodu $[x_0, y_0]$ dostaneme:

$$\begin{aligned} -\varphi'_y(x_0, y_0) &= 0 \\ 1 - \psi'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Platí tedy, že $\varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \psi'_y(x_0, y_0) = 1$

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 5. cvičení.

Příklad 5 (b) $xe^{u+v} + 2uv = 1, ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0]$

Platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$. Spojitost parciálních derivací funkcí F_1, F_2 plyne z předpisů pro jejich derivace - uvedené níže - a faktu, že složení spojitých funkcí a operace se spojitými funkcemi dávají složenou funkci. Spočteme rovnou i derivace v bodě $[x_0, y_0, u_0, v_0]$, které budeme potřebovat později.

$$\begin{aligned} \nabla F_1(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} e^{u+v} \\ 0 \\ xe^{u+v} + 2v \\ xe^{u+v} + 2u \end{pmatrix}, \quad \nabla F_1(1, 2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \nabla F_2(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} -2 \\ e^{u-v} \\ ye^{u-v} - \frac{1}{1+v} \\ -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}, \quad \nabla F_2(1, 2, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyní spočteme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{vmatrix} (1, 2, 0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -3 \neq 0$$

Podle Věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$.

Spočtěme parciální derivace pomocí matice.

Vektor $(\varphi_x(1, 2), \psi_x(1, 2))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{array} \right) (1, 2, 0, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_x(1, 2) = 0, \psi'_x(1, 2) = -1$.

Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{array} \right) (1, 2, 0, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\psi'_y(1, 2) = \frac{1}{3}$ a $\varphi'_y(1, 2) = -\psi'_x(1, 2) = -\frac{1}{3}$.

Jiný způsob, jak spočíst derivace:

Zderivujeme rovnosti $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0, F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0$, do získané soustavy dosadíme bod $[x_0, y_0]$ a soustavu vyřešíme.

$$F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = xe^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} + 2\varphi(x, y)\psi(x, y) - 1 = 0$$

$$F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = ye^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} - \frac{\varphi(x, y)}{1 + \psi(x, y)} - 2x = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\implies e^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} + xe^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} (\varphi'_x(x, y) + \psi'_x(x, y)) + 2\varphi'_x(x, y)\psi(x, y) + 2\varphi(x, y)\psi'_x(x, y) = 0 \\ &ye^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} (\varphi'_x(x, y) - \psi'_x(x, y)) - \frac{\varphi'_x(x, y) \cdot (1 + \psi(x, y)) - \varphi(x, y) \cdot \psi'_x(x, y)}{(1 + \psi(x, y))^2} - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$[x_0, y_0] \implies e^0 + 1 \cdot e^0 (\varphi'_x(x_0, y_0) + \psi'_x(x_0, y_0)) = 0$$

$$2e^0 (\varphi'_x(x_0, y_0) - \psi'_x(x_0, y_0)) - \frac{\varphi'_x(x_0, y_0)}{1} - 2 = 0$$

$$1 + \varphi'_x(x_0, y_0) + \psi'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$\varphi'_x(x_0, y_0) - 2\psi'_x(x_0, y_0) - 2 = 0$$

Dostáváme: $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \psi'_x(x_0, y_0) = -1$

$$\frac{\partial}{\partial y} \implies xe^{\varphi(x, y) + \psi(x, y)} (\varphi'_y(x, y) + \psi'_y(x, y)) + 2\varphi'_y(x, y)\psi(x, y) + 2\varphi(x, y)\psi'_y(x, y) = 0$$

$$e^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} + ye^{\varphi(x, y) - \psi(x, y)} (\varphi'_y(x, y) - \psi'_y(x, y)) - \frac{\varphi'_y(x, y) \cdot (1 + \psi(x, y)) - \varphi(x, y) \cdot \psi'_y(x, y)}{(1 + \psi(x, y))^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
[x_0, y_0] &\implies 1 \cdot e^0 (\varphi'_y(x_0, y_0) + \psi'_y(x_0, y_0)) = 0 \\
e^0 + 2e^0 (\varphi'_y(x_0, y_0) - \psi'_y(x_0, y_0)) - \frac{\varphi'_y(x_0, y_0)}{1} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'_y(x_0, y_0) + \psi'_y(x_0, y_0) &= 0 \\
1 + \varphi'_y(x_0, y_0) - 2\psi'_y(x_0, y_0) &= 0
\end{aligned}$$

Dostáváme: $\varphi'_y(x_0, y_0) = -\frac{1}{3}, \psi'_y(x_0, y_0) = \frac{1}{3}$

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 5. cvičení.

Příklad 5 (c) $x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}]$
Použijeme Větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zavedme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = x - e^u - u \sin v, \quad F_2(x, y, u, v) = y - e^u + u \cos v.$$

Platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$.

Spojitosť parciálních derivací funkcí F_1, F_2 plyne z předpisů pro jejich derivace - uvedené níže - a faktu, že složení spojitých funkcí a operace se spojitými funkcemi dávají složenou funkci. Spočteme rovnou i derivace v bodě $[x_0, y_0, u_0, v_0]$, které budeme potřebovat později.

$$\begin{aligned}
\nabla F_1(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -e^u - \sin v \\ -u \cos v \end{pmatrix}, \quad \nabla F_1\left(1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -e - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\nabla F_2(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -e^u + \cos v \\ -u \sin v \end{pmatrix}, \quad \nabla F_2\left(1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -e \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nyní spočteme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{vmatrix} \left(1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} -e - 1 & 0 \\ -e & -1 \end{vmatrix} = (-e - 1) \cdot (-1) - 0 \cdot (-e) = e + 1 \neq 0$$

Podle Věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$.

Spočteme parciální derivace pomocí matice.

Vektor $(\varphi_x(1 + e, e), \psi_x(1 + e, e))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\left(\begin{vmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -(F_1)'_x \\ -(F_2)'_x \end{vmatrix} \right) \left(1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\begin{vmatrix} -e - 1 & 0 \\ -e & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_x(1+e, e) = \frac{1}{1+e}$, $\psi'_x(1+e, e) = -e\varphi'_x(1+e, e) = -\frac{e}{1+e}$. Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\left(\begin{array}{cc|c} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{array} \right) \left(1+e, e, 1, \frac{\pi}{2} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -e-1 & 0 & 0 \\ -e & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Z matice vychází, že nutně $\varphi'_y(1+e, e) = 0$, $\psi'_y(1+e, e) = -e\varphi'_y(1+e, e) + 1 = 1$.

Jiný způsob, jak na derivace:

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 5. cvičení.

$$\begin{aligned} \psi'_x(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_x(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{0 - 1 \cdot (-e)}{-e - 1} = \frac{-e}{e+1} \\ \varphi'_x(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0)\psi'_x(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-0 - 1}{-e - 1} = \frac{1}{e+1} \\ \psi'_y(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_y(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-e - 1 - 0}{-e - 1} = 1 \\ \varphi'_y(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0)\psi'_y(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{0 - 0}{e+1} = 0 \end{aligned}$$

Příklad 5 (d) $5xu + 3yv = 4x^2yv + 4u^2v$, $4xyu^3 + xv^2 = 5yuv$, $[x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 1, 1, 1]$
Použijeme Větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zavedme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = 5xu + 3yv - 4x^2yv - 4u^2v, \quad F_2(x, y, u, v) = 4xyu^3 + xv^2 - 5yuv.$$

Použijeme Větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zavedme funkce

$$F_1(x, y, u, v) = x - e^u - u \sin v, \quad F_2(x, y, u, v) = y - e^u + u \cos v.$$

Platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$.

Spojitosť parciálních derivací funkcí F_1, F_2 plyne z předpisů pro jejich derivace - uvedené níže - a faktu, že složení spojitých funkcí a operace se spojitými funkcemi dávají složenou funkci. Spočteme rovnou i derivace v bodě $[x_0, y_0, u_0, v_0]$, které budeme potřebovat později.

$$\begin{aligned} \nabla F_1(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} 5u - 8xyv \\ 3v - 4x^2v \\ 5x - 8uv \\ 3y - 4x^2y - 4u^2 \end{pmatrix} & \nabla F_1(1, 1, 1, 1) &= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \nabla F_2(x, y, u, v) &= \begin{pmatrix} 4yu^3 + v^2 \\ 4xu^3 - 5uv \\ 12xyu^2 - 5yv \\ 2xv - 5yu \end{pmatrix} & \nabla F_2(1, 1, 1, 1) &= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{vmatrix} (1, 1, 1, 1) = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-3) - (-5) \cdot 7 = 9 + 35 = 44 \neq 0$$

Podle Věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$.

Spočtěme parciální derivace pomocí matice.

Vektor $(\varphi_x(1 + e, e), \psi_x(1 + e, e))$ je řešením soustav, jež lze reprezentovat pomocí následující matice (hodnoty derivací jsme dosadili podle výpočtů výše):

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_x \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_x \end{pmatrix} (1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -21 & -35 & 21 \\ 21 & -9 & -15 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -44 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -22 & 3 \end{pmatrix}$$

Z matice vychází, že nutně $\psi'_x(1, 1) = -\frac{3}{22}, \varphi'_x(1, 1) = -\frac{1}{3} (3 + 5\psi'_x(1, 1)) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{66-15}{22} = -\frac{17}{22}$.

Analogicky postupujeme při výpočtu derivace podle y .

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_u & (F_1)'_v & -(F_1)'_y \\ (F_2)'_u & (F_2)'_v & -(F_2)'_y \end{pmatrix} (1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -21 & -35 & 7 \\ 21 & -9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 0 & -44 & 10 \end{pmatrix}$$

Z matice vychází, že nutně $\psi'_y(1, 1) = -\frac{10}{44} = -\frac{5}{22}, \varphi'_y(1, 1) = -\frac{1}{3} (1 + 5\psi'_y(1, 1)) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{22-25}{22} = \frac{1}{22}$.

Jiný způsob, jak na derivace:

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 5. cvičení.

$$\begin{aligned} \psi'_x(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_x(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{-15 + 3 \cdot 7}{-44} = \frac{-3}{22} \\ \varphi'_x(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0)\psi'_x(x_0, y_0) - (F_1)'_x(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{5 \cdot \frac{-3}{22} + 3}{-3} = \frac{-15 + 3 \cdot 22}{-3 \cdot 22} = \frac{-17}{22} \\ \psi'_y(x_0, y_0) &= \frac{(F_2)'_y(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0)}{(F_1)'_v(x_0, y_0)(F_2)'_u(x_0, y_0) - (F_2)'_v(x_0, y_0)(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{3 + 7}{-44} = \frac{-5}{22} \\ \varphi'_y(x_0, y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0, y_0)\psi'_y(x_0, y_0) - (F_1)'_y(x_0, y_0)}{(F_1)'_u(x_0, y_0)} = \frac{\frac{-25}{22} + 1}{-3} = \frac{-25 + 22}{-3 \cdot 22} = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

Příklad 6 (a) $\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4}, [x_0, y_0] = [1, 1]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujeme a zavedeme funkci $F(x, y) = \arccos(\log x + \log y) - 3 \arcsin \frac{x+y}{4}$.
Ověrme předpoklady Věty 22.

$$F'_x(x, y) = \frac{-1}{x\sqrt{1 - (\log x + \log y)^2}} - \frac{3}{4\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{4}\right)^2}}$$

$$F'_y(x, y) = \frac{-1}{y\sqrt{1 - (\log x + \log y)^2}} - \frac{3}{4\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{4}\right)^2}}$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka (iii) z Věy 22 je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0]$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{-1}{1\sqrt{1-0^2}} - \frac{3}{4\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} = -1 - \frac{3}{4\sqrt{\frac{3}{4}}} = -1 - \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0$.

Dle Věy 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ : Podle Věy 22 spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y(\varphi(y_0), y_0)}{F'_x(\varphi(y_0), y_0)} = -\frac{-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}}{-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}} = -1$$

Druhá derivace φ : Spočteme druhé parciální derivace funkce F a dosadíme do předpisu odvozeného v teorii k 5. cvičení.

Zadefinujme pro usnadnění výpočtu funkce: $g(x, y) := \frac{-1}{x\sqrt{1 - (\log x + \log y)^2}}$, $h(x, y) := -\frac{3}{4\sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{4}\right)^2}}$. Pak $F'_x(x, y) = g(x, y) + h(x, y)$, $F'_y(x, y) = g(y, x) + h(x, y)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - (\log x + \log y)^2 + x \cdot (-2(\log x + \log y) \cdot \frac{1}{x})}{x^2 \cdot (1 - (\log x + \log y)^2)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1 - (0 + 0)^2 + 1 \cdot (-2(0 + 0) \cdot \frac{1}{1})}{1^2 \cdot (1 - (0 + 0)^2)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x+y}{4}\right)^2\right)^3}} \cdot \frac{-x - y}{8}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{3}{64} \cdot \frac{1 + 1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1+1}{4}\right)^2\right)^3}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,x}(x_0, y_0) = g'_x(x_0, y_0) + h'_x(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,y}(x_0, y_0) = F''_{y,x}(x_0, y_0) = g'_y(x_0, y_0) + h'_y(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{y,y}(\varphi(y_0), y_0) = g'_y(y, x) + h'_y(x, y) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,x}(x_0, y_0) + F''_{x,y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(y_0) = \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \cdot (-1) = 0$$

$$F''_{y,x}(x_0, y_0) + F''_{y,y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(y_0) = 0$$

Nyní dosadíme do předpisu pro φ'' , který je odvozen v teorii k 5. cvičení (z řetízkového pravidla). Uvědomme si však, že jelikož $x = \varphi(y)$, tak se nám prohodila role x y y , proto ve vzorci níže je např. ve jmenovateli $(F'_x)^2$ apod.

$$\begin{aligned}\varphi'' &= -\frac{(F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi') \cdot F'_x - F'_y \cdot (F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi')}{(F'_x)^2} = \\ &= -\frac{0 \cdot \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) - 0 \cdot \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)}{\left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = 0\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) = 1 - 1(y - 1) = 1 - y + 1 = 2 - y$$

Příklad 6 (b) $\sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) = 1$, $[x_0, y_0] = [-1, \frac{1}{2}]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujeme a zavedeme funkci $F(x, y) = \sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) - 1$. Ověříme předpoklady Věy 22.

$$F'_x(x, y) = \frac{1}{1+x^2} \cdot (\cos(\arctan x + \arctan(2y)) - \sin(\arctan x + \arctan(2y)))$$

$$F'_y(x, y) = \frac{2}{1+4y^2} \cdot (\cos(\arctan x + \arctan(2y)) - \sin(\arctan x + \arctan(2y)))$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka (iii) z Věy 22 je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0]$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{1+(-1)^2} (\cos(\arctan(-1) + \arctan(1)) - \sin(\arctan(-1) + \arctan(1))) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) - \sin(0)) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Dle Věy 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ : Podle Věy 22 spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y(\varphi(y_0), y_0)}{F'_x(\varphi(y_0), y_0)} = -\frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} = -2$$

Druhá derivace φ : Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned}
\varphi'(y) &= -\frac{F'_y(\varphi(y), y)}{F'_x(\varphi(y), y)} \\
A(y) &:= \frac{2}{1+4y^2} \cdot (\cos(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y)) - \sin(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y))) \\
B(y) &:= \frac{1}{1+\varphi(y)^2} \cdot (\cos(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y)) - \sin(\arctan(\varphi(y)) + \arctan(2y))) \\
\varphi''(y) &= -\frac{A'(y)B(y) - A(y)B'(y)}{B^2(y)} \\
A(y_0) &= 1 \\
A'(y) &= \frac{-2 \cdot 8y}{(1+4y^2)^2} \cdot (\dots) + \frac{2}{1+4y^2} \cdot \left(\frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2} + \frac{2}{1+4y^2} \right) \cdot (-\sin(\dots) - \cos(\dots)) \\
A'(y_0) &= \frac{-16 \cdot \frac{1}{2}}{(2)^2} \cdot 1 + \frac{2}{2} \cdot \left(\frac{-1}{1+(-1)^2} + \frac{2}{1+1} \right) \cdot (-\sin(0) - \cos(0)) = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \\
B(y_0) &= \frac{1}{2} \\
B'(y) &= \frac{-\varphi(y) \cdot \varphi'(y)}{(1+\varphi(y)^2)^2} \cdot (\dots) + \frac{1}{1+\varphi(y)^2} \cdot \left(\frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2} + \frac{2}{1+4y^2} \right) \cdot (-\sin(\dots) - \cos(\dots)) \\
B'(y_0) &= \frac{-(-1) \cdot (-2)}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-1}{1+(-1)^2} + \frac{2}{1+1} \right) \cdot (-\sin(0) - \cos(0)) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \\
\varphi''(y_0) &= -\frac{-\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{-3}{4}}{\frac{1}{4}} = -4 \cdot \frac{-5+3}{4} = 2
\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) = -1 - 2\left(y - \frac{1}{2}\right) = -2y$$

Příklad 6 (c) $\arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, \pi]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujeme a zavedeme funkci $F(x, y) = \arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) - \frac{\pi}{4}$. Ověříme předpoklady Věty 22.

$$\begin{aligned}
F'_x(x, y) &= \frac{1}{1+(x+\sin y)^2} + \frac{1}{1+(x+\cos y)^2} \\
F'_y(x, y) &= \frac{\cos y}{1+(x+\sin y)^2} + \frac{-\sin y}{1+(x+\cos y)^2}
\end{aligned}$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka (iii) z Věy 22 je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0]$, $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1+(1-1)^2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \neq 0$.

Dle Věy 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ : Podle Věy 22 spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y(\varphi(y_0), y_0)}{F'_x(\varphi(y_0), y_0)} = -\frac{\frac{-1}{2} + 0}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Druhá derivace φ : Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\begin{aligned}\varphi'(y) &= -\frac{F'_y(\varphi(y), y)}{F'_x(\varphi(y), y)} \\ A(y) &:= \frac{\cos y}{1 + (\varphi(y) + \sin y)^2} + \frac{-\sin y}{1 + (\varphi(y) + \cos y)^2} \\ B(y) &:= \frac{1}{1 + (\varphi(y) + \sin y)^2} + \frac{1}{1 + (\varphi(y) + \cos y)^2} \\ \varphi''(y) &= -\frac{A'(y)B(y) - A(y)B'(y)}{B^2(y)} \\ A(y_0) &= -\frac{1}{2} \\ A'(y) &= \frac{-\sin y \cdot \left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right) - \cos y \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \sin y) (\varphi'(y) + \cos y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right)^2} + \\ &\quad + \frac{-\cos y \cdot \left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right) + \sin y \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \cos y) (\varphi'(y) - \sin y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right)^2} \\ A'(y_0) &= \frac{0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right)}{4} + \frac{1 \cdot \left(1 + (1 - 1)^2\right) + 0}{1} = \frac{8}{3 \cdot 4} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \\ B(y_0) &= \frac{3}{2} \\ B'(y) &= \frac{-1 \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \sin y) (\varphi'(y) + \cos y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right)^2} + \frac{-1 \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \cos y) (\varphi'(y) - \sin y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right)^2} \\ B'(y_0) &= \frac{-2 \cdot (1 + 0) \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{4} + \frac{-2 \cdot 0}{1} = \frac{1}{3} \\ \varphi''(y_0) &= -\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{1}{6}}{\frac{9}{4}} = \frac{16}{6} \cdot \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) = 1 + \frac{1}{3} \cdot (y - \pi) = \frac{y}{3} + 1 - \frac{\pi}{3}$$

Příklad 7 vzorové řešení Kuncová